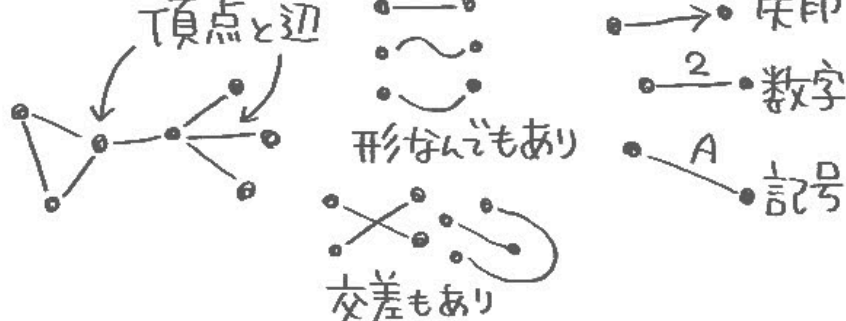


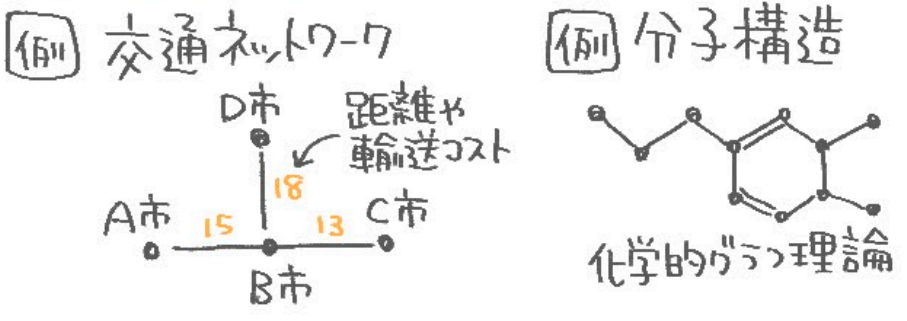


グラフの固有値と固有ベクトル

グラフとは



グラフ活用例

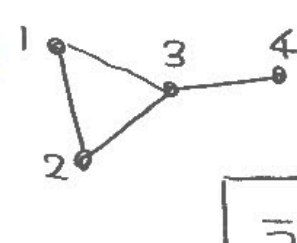


113113
使える

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

固有ベクトル (eigenvector) and 固有値 (eigenvalue) are indicated.

グラフから定まる行列



隣接行列

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

辺の情報が入っている (Edge information is included).
固有値: 2.17009, 0.31111, -1, -1.48119
固有ベクトル: $\begin{bmatrix} 1.85464 \\ 1.85464 \\ 2.17009 \\ 1 \end{bmatrix}$

ラプラス行列

$$L = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

固有値: 4, 3, 1, 0
113113はよい性質がある (113113 has good properties).
必ず0を最小固有値にもつ (Always has 0 as the minimum eigenvalue).

推移行列

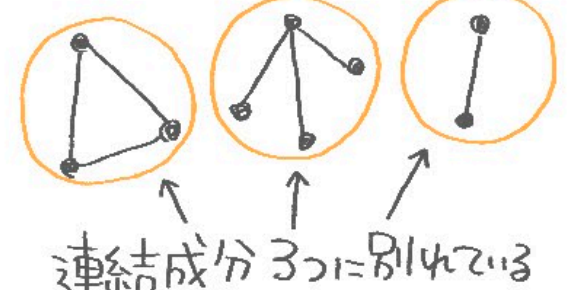
$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/3 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/3 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \end{bmatrix}$$

各列の合計が1 (Sum of each column is 1).
固有値: 1, 0.22871, -0.5, -0.72871
必ず1を最大固有値にもつ (Always has 1 as the maximum eigenvalue).
成分が非負 (Components are non-negative).
最大固有値1の固有ベクトルの成分がどれも0でなくかつ全て同符号 (Components of the eigenvector for the maximum eigenvalue 1 are all non-zero and have the same sign).

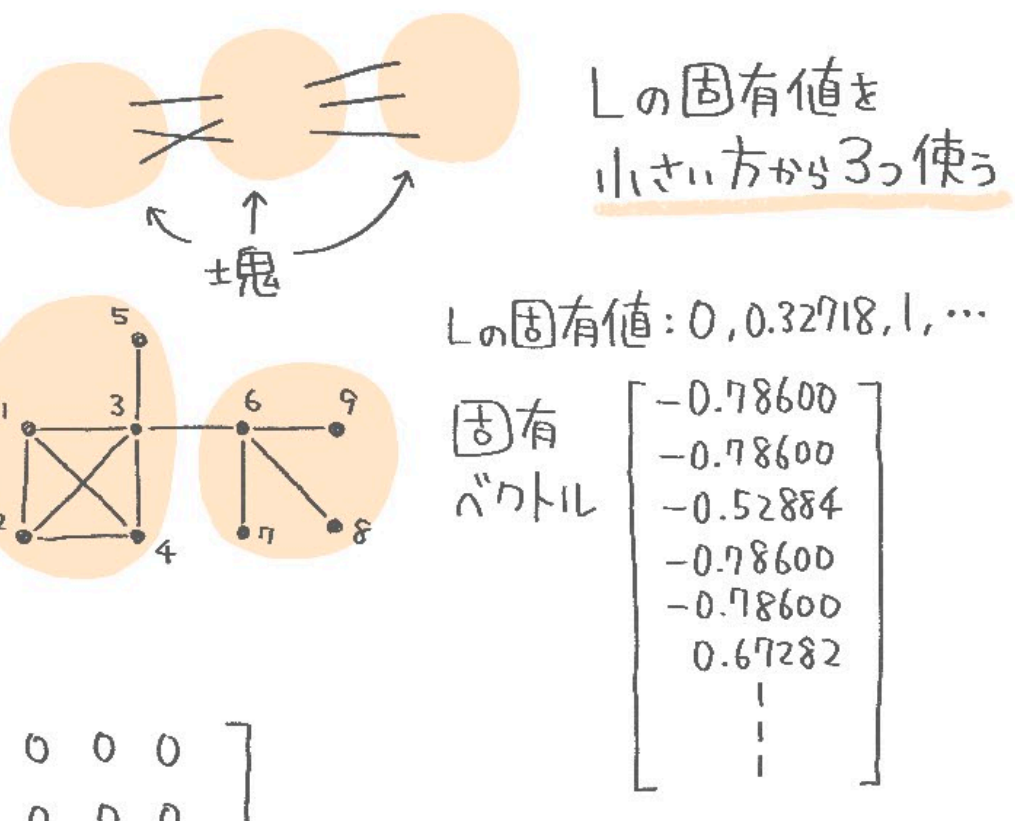
- ★よい性質が113113にある
- ★成分が非負
- ★最大固有値の固有ベクトルの成分がどれも0でなくかつ全て同符号

グラフの固有値からわかること

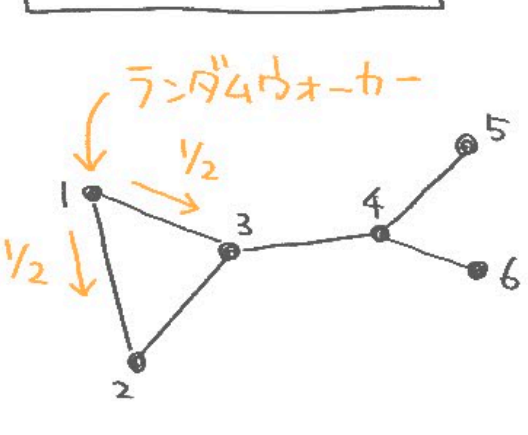
固有値0の重複度
= 連結成分の個数



スペクトラルグラフタギング



ランダムウォーク



$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

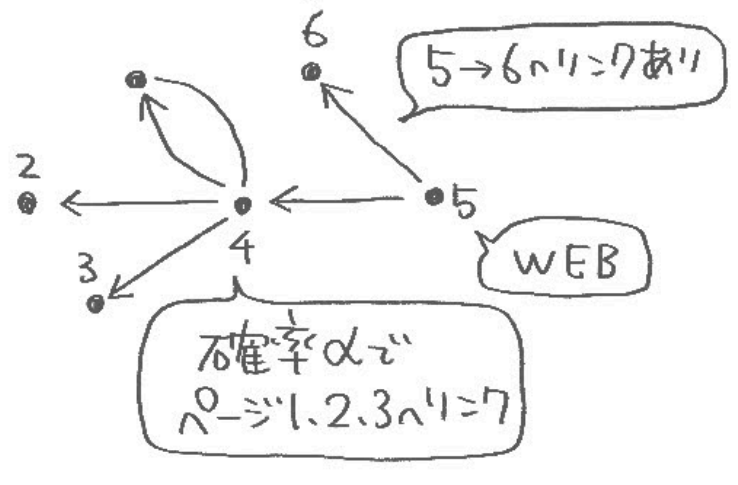
固有値: 1, 0.73741, ..., -0.90407
固有ベクトル: $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

★1以外の固有値の絶対値が小さいほど収束が早い! (The smaller the absolute value of eigenvalues other than 1, the faster the convergence!)

例 検索アルゴリズムでの活用 Google PageRank (~2019)

Googleはこれを活用し世界最大の企業に (Google uses this to become the world's largest company).

リンクなし = 0.5 * (0.5 * リンクなし) + 0.5 * (リンク先)



$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1/6 & 1/6 & 1/3 & 0 & 1/6 \\ 0 & 1/6 & 1/6 & 1/3 & 0 & 1/6 \\ 0 & 1/6 & 1/6 & 1/3 & 0 & 1/6 \\ 1 & 1/6 & 1/6 & 0 & 1/2 & 1/6 \\ 0 & 1/6 & 1/6 & 0 & 0 & 1/6 \\ 0 & 1/6 & 1/6 & 0 & 1/2 & 1/6 \end{bmatrix}$$

0 < α < 1 に対して (For 0 < α < 1)
 $R = \frac{1-\alpha}{6} J + \alpha T$
成分が全て1の正方行列 (Square matrix with all components 1).

- ★α-ランクのランク r_k の意味
 - 多くのα-ランクからリンクされると↑
 - ランクの大きいα-ランクからリンクされると↑
 - リンク数の少ないα-ランクからリンクされると↑

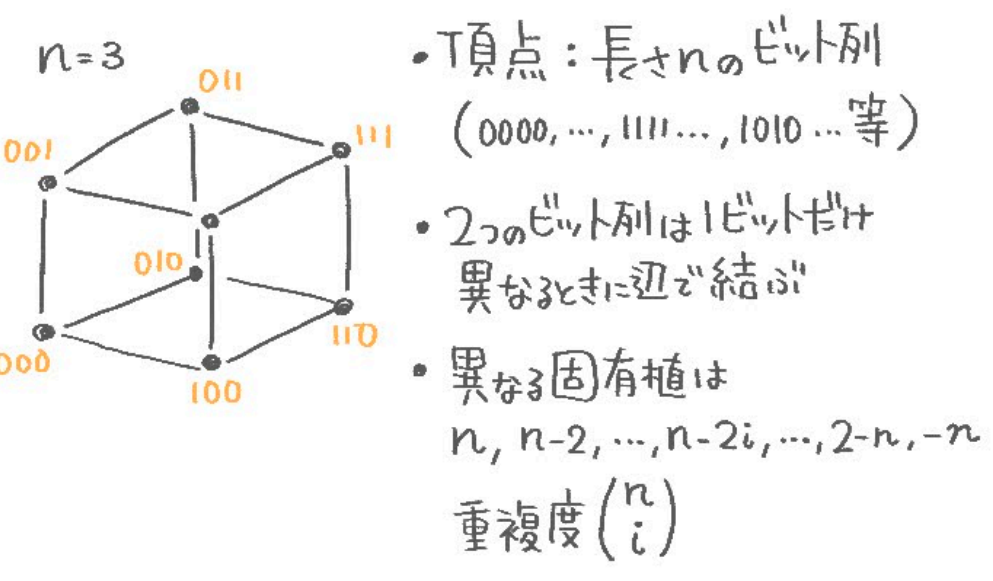
- ★成分が非負
- ★最大固有値1の固有ベクトル v の成分がどれも0でなくかつ全て同符号
- ★αの選び方がポイント (Choice of α is the key point).
* Googleでは α=0.85 を使用 (Google uses α=0.85).

良いグラフとは何か?

一般のグラフ × 「良い」グラフ
固有値、固有ベクトルは 近似計算 (Eigenvalues and eigenvectors are approximate calculations).
固有値、固有ベクトルは しばしば明示的に求まる (Eigenvalues and eigenvectors are often explicitly found).
★ 種々の代数的手法を駆使! (Use various algebraic methods!).

例 超立方体 Q_n

良いグラフ!

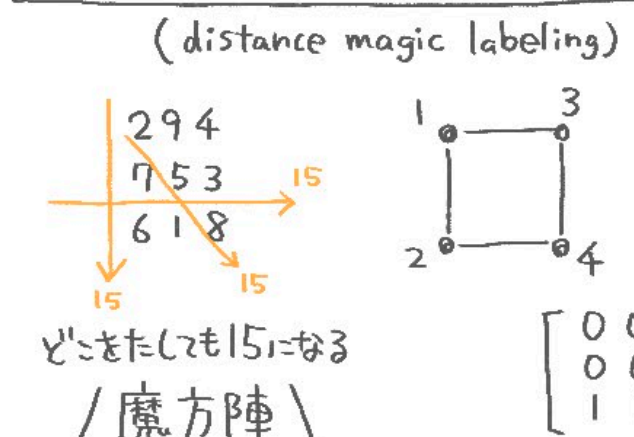


例 誤り訂正符号 = Q_n の頂点の集まり

誤り訂正能力を指定した上で、どれだけ符号語を取れるか? (Specify error correction capability, how many codewords can be taken?).
n=3, d=3 → 2個まで (n=3, d=3 → up to 2)
n=16, d=6 → 256個まで (n=16, d=6 → up to 256)
★異なる符号語は少なくともdビット異なる (Different codewords differ by at least d bits).

例 グラフの距離魔法ラベリング

各頂点に対し隣接する頂点のラベルの和が一定 (For each vertex, the sum of labels of adjacent vertices is constant).



$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

★超立方体 Q_n が距離魔法ラベリングを持つなら n は4で割って2余る (If hypercube Q_n has distance magic labeling, n is 2 mod 4).

ディスカッション

世の中の安定した自然現象はよい行列になる? (Stable natural phenomena in the world are good matrices?)

自然界のものも大事なものを/でないものに分ければ数学的に扱える? (Even things in nature, if divided into important and unimportant, can be handled mathematically?)

固有値が虚数になるものは現実世界にある? (Eigenvalues that become imaginary numbers exist in the real world?)

人のつながり信頼度に応用できる? (Can be applied to human connections and trust degrees?)

よい形のグラフは自然界にはまちな存在 (Good shaped graphs are natural existence).

スペクトラルグラフタギング "教師なし機械学習で使われている! 業務でも使えた!" (Spectral graph partitioning "Used in unsupervised machine learning! Used in business!")

WEBサイトのリニューアル時 広告 × WEB 性質 × 性質 どのように入れたいか? (When renewing website, how to mix advertising and website characteristics?)

感性の定量化 113113なネットワークで分岐のネットワーク (Quantification of intuition: branching network with 113113 network).

グラフ化する中で固有ベクトルで塊を見出せる (While graphing, clusters can be found with eigenvectors).

圧縮→単純化にかなうに自然現象をどう扱うか? (Compression → simplification, how to handle natural phenomena?)

α-ランクを人のつながりに活用できるか? (Can α-rank be used for human connections?)

グラフをどうつくるかが重要 (How to create graphs is important).

どう抽象化するのか... (How to abstractize it...)

辺に重みをつけても... (Even with weights on edges...)